



قسمت اول چکش کاری

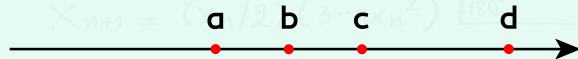
اسرار

● داود معصومی مهوار

الهام: خانم قبول کنید که سؤال میانگین آزمون، پرسش سهمگینی بود. سؤال دقیقاً گفته بود:

روی محور عددها جای چهار عدد a, b, c, d نسبت به هم در شکل زیر مشخص و نمایش داده شده است. جای میانگین آن‌ها را روی همین محور تعیین کنید و برای ادعای خود دلیل بیاورید. (فاصله a تا b برابر با فاصله b تا c و c برابر با نصف فاصله c تا d است.)

روی محور عددها جای چهار عدد a, b, c, d نسبت به هم در شکل زیر مشخص و نمایش داده شده است. جای میانگین آن‌ها را روی همین محور تعیین کنید و برای ادعای خود دلیل بیاورید. (فاصله a تا b برابر با فاصله b تا c و c برابر با نصف فاصله c تا d است.)



چهار عدد a, b, c, d نسبت به هم در شکل زیر مشخص و نمایش داده شده است. جای میانگین آن‌ها را روی همین محور تعیین کنید و برای ادعای خود دلیل بیاورید. (فاصله a تا b برابر با فاصله b تا c و c برابر با نصف فاصله c تا d است.)

چهار عدد a, b, c, d نسبت به هم در شکل زیر مشخص و نمایش داده شده است. جای میانگین آن‌ها را روی همین محور تعیین کنید و برای ادعای خود دلیل بیاورید. (فاصله a تا b برابر با فاصله b تا c و c برابر با نصف فاصله c تا d است.)

چهار عدد a, b, c, d نسبت به هم در شکل زیر مشخص و نمایش داده شده است. جای میانگین آن‌ها را روی همین محور تعیین کنید و برای ادعای خود دلیل بیاورید. (فاصله a تا b برابر با فاصله b تا c و c برابر با نصف فاصله c تا d است.)

چهار عدد a, b, c, d نسبت به هم در شکل زیر مشخص و نمایش داده شده است. جای میانگین آن‌ها را روی همین محور تعیین کنید و برای ادعای خود دلیل بیاورید. (فاصله a تا b برابر با فاصله b تا c و c برابر با نصف فاصله c تا d است.)

چهار عدد a, b, c, d نسبت به هم در شکل زیر مشخص و نمایش داده شده است. جای میانگین آن‌ها را روی همین محور تعیین کنید و برای ادعای خود دلیل بیاورید. (فاصله a تا b برابر با فاصله b تا c و c برابر با نصف فاصله c تا d است.)

چهار عدد a, b, c, d نسبت به هم در شکل زیر مشخص و نمایش داده شده است. جای میانگین آن‌ها را روی همین محور تعیین کنید و برای ادعای خود دلیل بیاورید. (فاصله a تا b برابر با فاصله b تا c و c برابر با نصف فاصله c تا d است.)

پریسا: شاید اشتباه می‌کنم، ولی من فکر می‌کنم سؤال ایراد اساسی دارد. سؤال از ما می‌خواهد میانگین چهار عدد را مشخص کنیم. در صورتی که خود سؤال آن چهار عدد را مشخص نکرده است! در شکل تنها جهت محور نمایش داده شده است و مبدأ آن مشخص نیست. پس واقعاً این عددها همان‌طور که در صورت پرسش گفته شده است، مشخص نیستند!

زهرا: فکر کنم پریسا کمی شتاب‌زده قضاوت کرد. پرسش نگفته که عددها مشخص شده‌اند! بلکه گفته که جای آن‌ها نسبت به هم مشخص شده‌اند. البته من هنوز نتوانسته‌ام از این موضوع کمک بگیرم. **سایه:** من فکر می‌کنم جای میانگین این چهار عدد دقیقاً مشخص نیست، ولی محدوده مشخصی دارد و باید بین دو عدد b و c جای بگیرد. زیرا قرار است میانگین این چهار عدد باشد و به همین خاطر باید بین آن‌ها قرار بگیرد. یعنی از دو تایی آن‌ها بزرگ‌تر و از دو تایی آن‌ها کوچک‌تر باشد.

اعظم: فکر نمی‌کنم حرف سایه درست باشد. او دلیلی برای گفته‌های خود نیاورد و فقط ادعا کرد که میانگین باید فلان جور جای بگیرد. **سایه:** دلایل واضح است. می‌گوییم «میانگین». طبق همین حرف، میانگین باید میان عددها باشد. امکان ندارد میانگین هر جای دل‌خواهی قرار بگیرد.

چهار عدد a, b, c, d نسبت به هم در شکل زیر مشخص و نمایش داده شده است. جای میانگین آن‌ها را روی همین محور تعیین کنید و برای ادعای خود دلیل بیاورید. (فاصله a تا b برابر با فاصله b تا c و c برابر با نصف فاصله c تا d است.)

چهار عدد a, b, c, d نسبت به هم در شکل زیر مشخص و نمایش داده شده است. جای میانگین آن‌ها را روی همین محور تعیین کنید و برای ادعای خود دلیل بیاورید. (فاصله a تا b برابر با فاصله b تا c و c برابر با نصف فاصله c تا d است.)

چهار عدد a, b, c, d نسبت به هم در شکل زیر مشخص و نمایش داده شده است. جای میانگین آن‌ها را روی همین محور تعیین کنید و برای ادعای خود دلیل بیاورید. (فاصله a تا b برابر با فاصله b تا c و c برابر با نصف فاصله c تا d است.)

چهار عدد a, b, c, d نسبت به هم در شکل زیر مشخص و نمایش داده شده است. جای میانگین آن‌ها را روی همین محور تعیین کنید و برای ادعای خود دلیل بیاورید. (فاصله a تا b برابر با فاصله b تا c و c برابر با نصف فاصله c تا d است.)

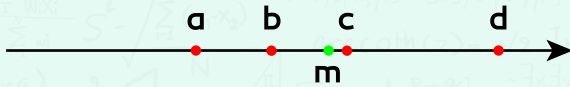
این اصلاً مهم نیست که همه آن‌ها را به کمک یکی از آن‌ها نمایش داده‌ام و معرفی کرده‌ام. اما موضوع مهم‌تری هست. واقعاً استدلال من خاص است و درباره بعضی از عددها حرفی برای گفتن ندارد. در سؤال گفته شده که فاصله b از a و c یکسان است، ولی من با پیروی از مثال‌های نفیسه شتاب کردم و این فاصله را دقیقاً برابر با یک گرفتم. حالا باید استدلالم را اصلاح کنم. پس فرض می‌کنم: $a = 5$, $b = 5 + s$, $c = 5 + 2s$, $d = 5 + 4s$ باشد و میانگین را محاسبه می‌کنم.

$$\begin{aligned} \text{میانگین} &= \frac{(5) + (5+s) + (5+2s) + (5+4s)}{4} \\ &= \frac{20+7s}{4} = 5 + s + \frac{3s}{4} \end{aligned}$$

و می‌بینیم که میانگین به اندازه $\frac{3}{4}$ از سومین عدد، یعنی $5 + 2s$ کوچک‌تر است و اگر مبدأ را به اندازه m از عدد اول دورتر کنیم، بقیه عددها نیز هر کدام به همین اندازه از مبدأ دورتر می‌شوند. حالا با عددهای $a = m + 5$, $b = m + 5 + s$, $c = m + 5 + 2s$ و $d = m + 5 + 4s$ سر و کار خواهیم داشت و دوباره میانگین را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \text{میانگین} &= \frac{(m+5) + (m+5+s) + (m+5+2s) + (m+5+4s)}{4} \\ &= \frac{4m+20+7s}{4} = m + 5 + s + \frac{3s}{4} \end{aligned}$$

و باز هم می‌بینیم که میانگین به اندازه $\frac{3}{4}$ از سومین عدد یعنی $m + 5 + 2s$ کوچک‌تر است. پس برای مشخص کردن جای میانگین این چهار عدد روی محور، کافی است جایی بین b و c را مشخص کنیم که فاصله آن تا c یک چهارم فاصله b تا c باشد؛ این جوری:



پریا: قبول کنید که به قول الهام، سؤال سهمگینی بود.

من: حالا بیشتر درباره این سؤال صحبت خواهیم کرد. الان وقت زیادی از کلاس مان نمانده است. در این زمان کوتاه توجه کنید که ندا می‌توانست کمی ساده‌تر استدلال کند. او راه‌حلش را از بین گفته‌های دیگران پیدا کرد و طبیعی است که در وقت کوتاه نتوانست خوب آن را سر و سامان دهد. راه کاملاً درست است، ولی ساده‌تر این بود که عدد اول را همان a ، دومی را $b = a + s$ ، سومی را $c = a + 2s$ و بالآخره عدد چهارم را $d = a + 4s$ می‌گرفت. در این صورت یک‌بار میانگین را حساب می‌کرد:

$$\begin{aligned} \text{میانگین} &= \frac{(a) + (a+s) + (a+2s) + (a+4s)}{4} \\ &= \frac{4a+7s}{4} = a + s + \frac{3s}{4} \end{aligned}$$

و می‌توانست به سادگی حکم کند که میانگین به مقدار $\frac{3}{4}$ از عدد سوم، یعنی $a + 2s$ کوچک‌تر است. هفته بعد باز هم درباره این سؤال گفت‌وگو خواهیم کرد.

همچنین با مثال $a=2$, $b=3$, $c=4$, $d=6$ نیز فهمیدم که: $\frac{15}{4} = 3 + \frac{3}{4}$ یا با مثال $a=5$, $b=6$, $c=7$, $d=9$ نیز فهمیدم که: $\frac{27}{4} = 6 + \frac{3}{4}$ میانگین.

حدم این است که احتمالاً به خاطر فاصله‌های برابر b از a و c و نیز اینکه فاصله d از c دو برابر فاصله b از a (یا از c) است، همیشه میانگین عددی است که بخش ناصحیح آن عدد سه چهارم یا 0.75 است.

الهه: مثال‌های نفیسه چیز بزرگ‌تری را نشان می‌دهند. البته من هم حدس می‌زنم و اثباتی برای گفته خود ندارم، ولی آنچه می‌بینم این است که همیشه، میانگین به اندازه $\frac{1}{4}$ از عدد سوم کوچک‌تر است. در مثال نخست او داریم: $3 - \frac{1}{4} = 2.75$ میانگین، در مثال دوم: $4 - \frac{1}{4} = 3.75$ میانگین و در مثال سوم او: $6 - \frac{1}{4} = 5.75$ میانگین. احتمالاً موضوع این است که در این پرسش موقعیت مبدأ روی محور اهمیتی ندارد و همیشه برای پیدا کردن میانگین باید وسط b و c را مثلاً e بنامیم و میانگین درست وسط e و c خواهد بود.

الهام: به نظر من خانم معلم مهربان‌تر از آن است که اثبات چنین چیزی را از ما انتظار داشته باشد. بدون داشتن مبدأ واقعاً دست ما برای استدلال بسته است!

من هیچ نمی‌گفتم و بچه‌ها متوجه شده بودند که همین جا به جواب نزدیک هستند و فکر می‌کردند.

ندا (بعد از سه دقیقه): فکر می‌کنم موضوع پیچیده نیست و توانستم حدس الهه را ثابت کنم. اول از همان مثال الهه و نفیسه روشن است که برای $a=5$, $b=6$, $c=7$, $d=9$ داریم:

$$\frac{27}{4} = 6 + \frac{3}{4} = \text{میانگین و می‌دانیم که در این}$$

حالت فاصله مبدأ با a برابر 5 است. پس به سادگی این فاصله را بیشتر و فرض می‌کنیم برابر با $m+5$ باشد. در این صورت فاصله مبدأ از عددهای دیگر هم درست به همین اندازه بیشتر می‌شود و خواهیم داشت:

$$a=m+5, b=m+6, c=m+7 \text{ و } d=m+9$$

حالا خیلی ساده میانگین را محاسبه می‌کنم:

$$\begin{aligned} \text{میانگین} &= \frac{(m+5) + (m+6) + (m+7) + (m+9)}{4} \\ &= \frac{4m+27}{4} = m + \frac{27}{4} = m + 6 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

یعنی می‌بینیم که میانگین نیز به همان اندازه m از مبدأ دور می‌شود. یعنی نسبت به عددهای دیگر جابه‌جا نمی‌شود و به تعبیر الهه عدد $m + \frac{27}{4} = m + 6 + \frac{3}{4}$ همان عدد سوم، یعنی $m+7$ است که یک چهارم یا بیست و پنج صدم از آن کم شده است.

سارا: نمی‌توانم حرف ندا را قبول کنم. اساس حرف او یک مثال است و بقیه استدلالش را بر آن استوار کرده است. معلوم نیست که اگر با مثال دیگری آغاز می‌کرد به کجا می‌رسید.

ندا: ببینید. اگر من بتوانم همه عددهایی را که در سؤال آمده‌اند به روشی که گفتم نمایش بدهم، آن‌گاه استدلالم درباره آن‌ها ناقص نیست و درباره همه آن‌ها حرف زده‌ام و باید حرف مرا بپذیرید و